Statistique mathématique I **STT-16558**
17 décembre 2007 **8h30-10h30**

Épreuve partielle #3

RÉPONDRE À EXACTEMENT QUATRE (4) QUESTIONS.

(25 points)
1) On rappelle que la loi exponentielle de moyenne λ est définie par la densité

$$f(x|\lambda) = \frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}, \quad x > 0, \quad = 0 \text{ ailleurs.}$$

La moyenne, la variance et l'information de Fisher associées à cette loi sont respectivement λ, λ^2 et $1/\lambda^2$.

a) Supposons que l'on dispose d'une seule observation X obéissant à la loi exponentielle de moyenne λ. À l'aide d'un pivot exact dont vous justifierez le choix, construire un intervalle de confiance *exact* de 90% de la forme $[T_1(X), T_2(X)]$ pour λ.

b) Expliquer comment construire un intervalle *approximatif* de 90% pour λ lorsqu'on dispose de n observations indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et lorsque n est suffisamment grand.

(25 points)
2) Étant donné un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de la loi de Bernoulli de paramètre p, le théorème limite central implique qu'un intervalle de confiance approximatif de $100(1-a)\%$ pour p s'écrit sous la forme

$$\left[\frac{\overline{X} + \frac{z^2}{2n} \pm \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X}) + \frac{z^2}{4n}}}{1 + \frac{z^2}{n}} \right],$$

où $\Phi(z) = 1 - \alpha/2$.

a) Si $d > 0$, montrer que la *demi-longueur* de l'intervalle ci-dessus est $\leq d$ dès que $n \geq \frac{z^2}{4d^2} - z^2$.

b) Expliquer brièvement à quelle application pratique peut servir le résultat obtenu en a).

c) Supposons que $n = 750$. Sans prendre de nouvelles observations, est-il possible de construire un intervalle de confiance qui soit de demi-longueur au plus 0.05 ? Si oui, dire explicitement comment.

(25 points)
3) Une machine-outil produit une pièce d'automobile dont le diamètre en cm est une variable aléatoire modélisé par la loi $N(1.25, \sigma^2)$. On désire faire un test sur la variance σ^2, paramètre mesurant la précision de la machine.
À partir d'un échantillon de taille 20, on a calculé la somme des écarts quadratiques par rapport à la moyenne :

$$\sum_1^{20}(x_i - 1.25)^2 = .038.$$

a) Montrer que la région critique du meilleur test de seuil α pour tester

$$\begin{aligned} H_0 &\quad : \quad \sigma^2 = .0013 \quad \text{contre} \\ H_1 &\quad : \quad \sigma^2 = .002 \end{aligned}$$

s'exprime sous la forme $\{\underline{x} : \sum_1^{20}(x_i - 1.25)^2 \geq c_\alpha\}$.
Rappel. La densité normale s'écrit

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

b) Le test obtenu en a) est-il uniformément le plus puissant pour tester H_0 contre $H_1 : \sigma^2 > .0013$? Justifier.

c) Sachant que $\sum_1^n (X_i - \mu)^2/\sigma^2$ est un khi-deux lorsque $X_1, \ldots, X_n$ sont $N(\mu, \sigma^2)$ indépendantes, déterminer exactement la région critique du test de seuil $\alpha = .05$. *Dire quelle sera la décision prise.*

d) Quelle est la puissance du test pour $\sigma^2 = .0019$? (Ne donner que la formule pour calculer la probabilité.)

(25 points)
4) À l'aide d'une seule observation $X = x$, on demande de décider entre les hypothèses suivantes sur la densité de X :

$$\begin{aligned} H_0 : f_0(x) &= 1, & 0 < x < 1 \\ H_1 : f_1(x) &= 6x(1-x), & 0 < x < 1 \end{aligned}$$

a) Déterminer la forme de la région critique du meilleur test.

b) Quelle sera exactement la région critique si $\alpha = .05$?

c) Quelle sera la puissance du test déterminé en b) ? Que penser d'un tel test ?

d) Comment interprétez-vous la forme de la région critique ?

(25 points)

5) On considère la loi uniforme $U[\theta, 0]$, où $\theta < 0$. À l'aide d'un échantillon aléatoire de taille n, on désire tester $H_0 : \theta \leq -1/2$ contre $H_1 : \theta > -1/2$. On se donne comme région critique

$$C = \{\underline{x} : x_{(1)} = \min x_i \geq c_\alpha\}.$$

a) Vrai ou faux (justifier) : la puissance du test construit ci-dessus est une fonction croissante de θ.

b) Quelle valeur de c (fonction de n) doit-on prendre pour obtenir un test de seuil $\alpha = .05$?

c) Quelle est la valeur minimale de n faisant en sorte que la puissance en $\theta = -1/4$ soit au moins 0.9 ?

Jean-Claude Massé
Professeur